全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧升级版

主编 肖德好

导学案

高中数学

选择性必修第一册 RJB

本书为智慧教辅升级版

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。

江西美术出版社
全国百佳图书出版单位

CONTENTS 目录 导学案

01 第一章　空间向量与立体几何
PART ONE

02 第二章　平面解析几何
PART TWO

第一章　空间向量与立体几何

1.1　空间向量及其运算

1.1.1　空间向量及其运算

第 1 课时　空间向量的概念及线性运算

【学习目标】

1. 了解空间向量的相关概念；

2. 会用平行四边形法则、三角形法则作出空间向量的和与差，掌握空间向量的线性运算的意义及运算律.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　空间向量的有关概念

1. 定义：空间中既有________又有________的量称为空间向量. 向量的大小也称为向量的________(或________). 空间向量可用有向线段表示，有向线段的________表示向量的大小，向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可记作 $\overrightarrow{AB}$，其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

向量与有向线段的区别：向量的要素为大小和方向，向量是可以自由移动的；有向线段的要素为始点、终点、长度，有向线段是固定的，不能自由移动.

2. 几类特殊的空间向量

名称	定义	表示
零向量	始点和终点________的向量称为零向量，零向量的方向是不确定的	用________表示，$|\boldsymbol{0}|=0$
单位向量	模等于________的向量称为单位向量	用 $\boldsymbol{e}$ 表示，$|\boldsymbol{e}|=$________
相等向量	大小________、方向________的向量称为相等向量	记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$
两个向量平行(共线)	如果两个非零向量的方向________或________，则称这两个向量平行. 规定零向量与任意向量平行	记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

【诊断分析】判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)零向量没有方向.　(　　)

(2)两个有公共终点的向量一定是共线向量.　(　　)

(3)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$.　(　　)

(4)所有的单位向量都是相等向量.　(　　)

(5)若两个向量是共线向量，则表示这两个向量的有向线段必在同一条直线上.　(　　)

◆ 知识点二　共面向量

一般地，空间中的多个向量，如果表示它们的有向线段通过平移之后，都能在____________内，则称这些向量共面.

注意：空间中任意两个向量都是共面的，但空间中任意三个向量不一定共面.

【诊断分析】判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)若分别表示空间两向量的有向线段所在的直线不共面，则这两个向量不共面.　(　　)

(2)向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，即表示这三个向量的有向线段所在的直线共面.　(　　)

◆ 知识点三　空间向量的加法运算

1. 运算法则

①三角形法则：给定两个平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在该平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作出向量 $\overrightarrow{AC}$，则________是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(也称________为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量)，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，因此 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$________. 当平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 正好能构成一个三角形，

这种求两向量和的作图方法也常称为向量加法的三角形法则.因为空间中的任意两个向量都共面,所以空间中两个向量的和,除了 A 点可以在空间中任意选定之外,其他的与平面情形完全一样.特别地,向量加法的三角形法则在空间中也成立.

②平行四边形法则:任意给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,在空间中任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AC 为邻边作一个平行四边形 $ABDC$,作出向量 $\overrightarrow{AD}$,则________$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2. 运算律

加法交换律:____________.

加法结合律:__________________.

3. 结论:三个不共面的向量的和,等于以这三个向量为邻边的平行六面体中,与这三个向量有共同始点的__________所表示的向量.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. ( )

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AO}$. ( )

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. ( )

◆ 知识点四 空间向量的减法运算

1. 相反向量:给定一个空间向量,我们把与这个向量__________、__________的向量称为它的相反向量.

2. 向量减法的三角形法则:在空间中任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,作出向量 $\overrightarrow{BA}$,则向量________就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差(也称 $\overrightarrow{BA}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量),即 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$________.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 正好能构成一个三角形.

◆ 知识点五 空间向量的数乘运算

1. 数乘向量:给定一个实数 λ 与任意一个空间向量 $\boldsymbol{a}$,规定它们的乘积是一个空间向量,记作________.

(1)当 $\lambda\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为________,而且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向:

①当 $\lambda>0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________;

②当 $\lambda<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________.

(2)当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=$________.

上述实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘的运算简称为数乘向量.

2. 向量平行:如果存在实数 λ,使得________,则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.

3. 三点共线:如果存在实数 λ,使得__________,则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 平行且有公共点 A,从而 A,B,C 三点一定共线.特别地,当 $\lambda=$__________,即__________时,B 为线段 AC 的中点.

4. 运算律:$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}=$__________$(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$__________$(\lambda\in\mathbf{R})$.

空间向量的加法、减法与数乘运算,以及它们的混合运算,统称为空间向量的________运算.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)空间向量的数乘运算中 λ 只决定向量的大小,不决定向量的方向. ( )

(2)如果向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$,那么一定存在实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 成立. ( )

(3)若点 C 是线段 AB 的三等分点,则 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 空间向量的有关概念及应用

例 1 (1)(多选题)下列说法中正确的是 ( )

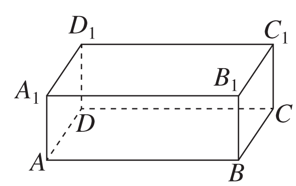
A. 若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个单位向量,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

B. 若两个向量共线,则这两个向量方向相同

C. 若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为非零向量,且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

D. 空间任意两个非零向量都可以平移到同一平面内

(2)(多选题)如图所示,在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=3$,$AD=2$,$AA_1=1$,则在以八个顶点中的两个分别为始点和终点的向量中 ( )



A. 单位向量有 8 个

B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 3 个

C. $\overrightarrow{AA_1}$ 的相反向量有 4 个

D. 模为 $\sqrt{5}$ 的向量有 4 个

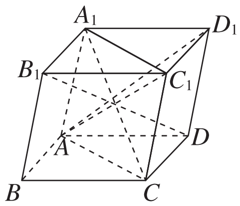
变式 如图所示，在平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，给定下列各对向量：

①$\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1C}$；

②$\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{B_1D}$；

③$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$；

④$\overrightarrow{CC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1A}$.



其中是相反向量的有________对.

[素养小结]

解答空间向量有关概念问题的关键点及注意点：

(1)关键点：紧紧抓住向量的两个要素，即大小和方向.

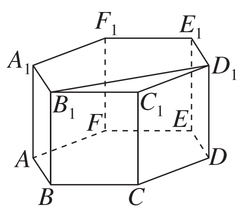
(2)注意点：①零向量不是没有方向，而是它的方向是任意的；②单位向量的方向虽然不一定相同，但它们的长度都是1；③两个向量的模相等，不一定是相等向量，反之，若两个向量相等，则它们不仅模相等，方向也相同.

◆ 探究点二　空间向量的加减运算

例2 如图，在正六棱柱 $ABCDEF$-$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中.

(1)化简 $\overrightarrow{A_1F_1}-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}$，并在图中标出化简结果的向量；

(2)化简 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{B_1D_1}$，并在图中标出化简结果的向量.



变式 (1)[2025·北京师范大学附属实验中学高二月考] 在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，化简 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=$ (　　)

A. $\overrightarrow{CB_1}$　　B. $\overrightarrow{BC_1}$

C. $\overrightarrow{CA_1}$　　D. $\overrightarrow{AC_1}$

(2)在四棱柱 $ABCD$-$A'B'C'D'$中，底面 $ABCD$ 为矩形，化简下列各式：

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{BC}$；

②$\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}$.

[素养小结]

空间向量加、减法运算的技巧：

(1)向量加法的三角形法则是解决空间向量加、减法运算的关键，灵活应用相反向量可使向量间首尾相接.

(2)利用三角形法则和平行四边形法则进行向量的加、减法运算时，务必要注意和向量、差向量的方向，必要时可采用空间向量的自由平移获得更准确的结果.

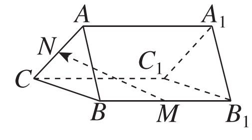
◆ 探究点三　空间向量的数乘运算及其应用

例3 (1)在三棱锥 A-BCD 中，E 是 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AE}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=$ (　　)

A. $\overrightarrow{BD}$　　B. $\overrightarrow{DB}$

C. $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$　　D. $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

(2)(多选题)如图，在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，M，N 分别为 BB_1，AC 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$ (　　)



A. $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})$

B. $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1C})$

C. $-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_1})$

D. $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$

变式 (1)[2025·湖北孝感重点高中高二期中]在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,E 是 BC 的中点,$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GE}$,则 $\overrightarrow{GC_1}=$ ( )

A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$

B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$

C. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$

D. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}$

(2)在四面体 $OABC$ 中,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{MA}(\lambda>0)$,$N$ 为 BC 的中点,若 $\overrightarrow{MN}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$,则 $\lambda=$ ( )

A. $\frac{1}{3}$ B. 3

C. $\frac{1}{2}$ D. 2

[素养小结]

(1)若 AB 是空间中任意一条线段,O 是空间中任意一点,则 M 为 AB 中点的充要条件是 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

(2)计算向量的数乘时,要注意数形结合,即结合具体图形,利用向量的三角形法则、平行四边形法则,将目标向量转化为已知向量.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. 已知 $\lambda\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{a}$ 为非零向量,则下列结论正确的是 ( )

A. $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向

B. $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$

C. $\lambda\boldsymbol{a}$ 可能是 $\mathbf{0}$

D. $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\boldsymbol{a}$

2. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,下列选项中化简后为零向量的是 ( )

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{C_1A_1}$

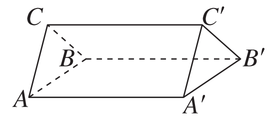
D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AB}$

3. 在四面体 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CN}$,若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$,则 $x+y+z=$ ( )

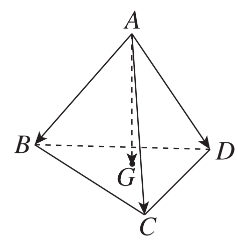
A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$ D. 1

4. 如图所示,在三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 中,$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{A'C'}$ 是________向量,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{B'A'}$ 是________向量.(填"相等"或"相反")



5. 如图,设 A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外的一点,G 是 $\triangle BCD$ 的重心.求证:$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.



第 2 课时　空间向量的数量积

【学习目标】

1. 掌握空间向量的夹角概念及表示方法；
2. 掌握两个空间向量的数量积的概念、性质、计算方法及运算规律；
3. 能运用数量积求向量夹角和判断向量的共线与垂直.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　两个空间向量的夹角

1. 定义：给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间中任选一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则大小在$[0,\pi]$内的$\angle AOB$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的________，记作________.

2. 如果$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$________，记作________.

3. 规定：零向量与任意向量都垂直.

◆ 知识点二　空间向量的数量积及性质

1. 定义：两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称为内积)定义为________________________.

规定：零向量与任意向量的数量积为 0.

2. 投影：一般地，给定空间向量 $\boldsymbol{a}$ 和空间中的直线 l(或平面 α)，过 $\boldsymbol{a}$ 的始点和终点分别作直线 l(或平面 α)的垂线，假设垂足为 A，B，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l(或平面 α)上的投影.

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量与 $\boldsymbol{b}$ 的长度的________.

3. 空间向量数量积的性质

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$________.

(2)$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

(3)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

(4)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

(5)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律).

(6)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

注：不满足结合律$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则一定有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.　(　　)

(2)对于非零向量 $\boldsymbol{b}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，可得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.　(　　)

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$是钝角.　(　　)

(4)若非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为同向的空间向量，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.　(　　)

(5)已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 60°的两个单位向量，则向量 $\boldsymbol{e}_1$ 在向量 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影为$\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$.　(　　)

(6)若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为空间向量，则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.　(　　)

(7)对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间向量的夹角

例 1　在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中，求：

(1)$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB}\rangle$，$\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\rangle$，$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\rangle$；

(2)$\langle\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BC'}\rangle$，$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\rangle$；

(3)$\langle\overrightarrow{D'A},\overrightarrow{D'C}\rangle$，$\langle\overrightarrow{C'D},\overrightarrow{BC'}\rangle$.

变式　在正四面体 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AC，AD 的中点，则 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 的夹角为　(　　)

A. 30°　　B. 60°

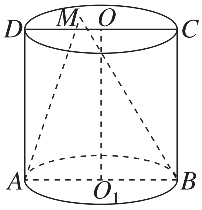
C. 120°　　D. 150°

[素养小结]

求两向量夹角的关键是把两向量平移到一个公共起点，找到向量的夹角，再利用解三角形的知识求角，注意向量夹角的范围是$[0,\pi]$.

◆ 探究点二　空间向量的数量积运算

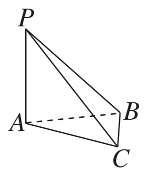
例 2 (1)[2025·广西玉林高二期中] 如图,边长为 4 的正方形 $ABCD$ 是圆柱 OO_1 的轴截面,M 为上底面圆 O 内一点,则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最小值为　　　(　　)



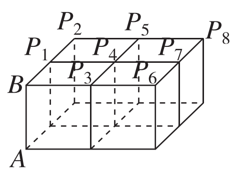
A. 6　　　　B. 8

C. 10　　　　D. 12

(2)如图所示,已知 $PA\perp$ 平面 ABC,$AC=6\sqrt{3}$,$PA=AB=BC=6$,则向量 $\overrightarrow{BP}$ 在向量 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影的数量是________.



变式 (1)如图,四个棱长为 1 的正方体排成一个正四棱柱,AB 是一条侧棱,$P_i(i=1,2,\cdots,8)$是上底面上其余的八个点,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots,8)$的可能值的个数为　　　(　　)



A. 1　　　　B. 2

C. 4　　　　D. 8

(2)[2025·广东深圳高二期中] 在正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中,O 是$\triangle ABC$ 的中心,$PA=AC=2$,则 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PB}=$________.

[素养小结]

(1)空间向量数量积运算的两种方法:

①利用定义:利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$并结合运算律进行计算.

②利用图形:计算两个向量的数量积,可先将两向量平移到同一顶点,利用图形寻找夹角,再代入数量积公式进行计算.

(2)在几何体中求空间向量数量积的步骤:

①首先将各向量分解成已知模和夹角的向量的组合形式.

②利用向量的运算律将数量积展开.

③利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$求解.

◆ 探究点三　空间向量数量积的应用

例 3 (1)[2025·沈阳高二期中] 已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{7}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　　　(　　)

A. $30°$　　　　B. $150°$

C. $60°$　　　　D. $120°$

(2)[2025·武汉高二期末] 在棱长为 6 的正四面体 $ABCD$ 中,点 P 与 Q 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CQ}$,则$|\overrightarrow{PQ}|=$______.

变式 (1)[2025·湖南常德高二期中] 已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两夹角均为 $60°$,其模均为 1,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}|=$________.

(2)在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,侧棱 $AA_1=2$,且$\angle A_1AB=\angle A_1AD=120°$,则 $AC_1=$________,直线 BD_1 与直线 AC 所成角的余弦值为________.

[素养小结]

利用空间向量的数量积公式可求空间向量的夹角、模以及解决与垂直有关的问题.常用性质有:

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

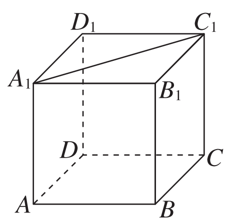
(2)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$;

(3)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 如图所示,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,下列各组向量的夹角为 $45°$的是　　　(　　)



A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1}$　　　　B. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$

C. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A_1D_1}$　　　　D. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{B_1A_1}$

2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$的棱长为 1,且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$,则$(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$　　　(　　)

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. -1

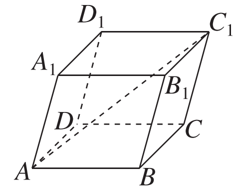
3. 在四面体 $ABCD$ 中,$\angle ABD=\angle BDC=90°$,$AC=2BD$,则 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影为　　(　　)

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

4. 在正四面体 $ABCD$ 中,$AB=2$,若 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=$________.

5. 如图,在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=AD=4$,$AA_1=5$,$\angle BAD=90°$,$\angle BAA_1=\angle DAA_1=60°$,则 AC_1 的长为________.



1.1.2　空间向量基本定理

【学习目标】

1. 了解共线向量、共面向量的意义,掌握它们的表示方法;
2. 理解向量共线、共面的充要条件及其推论,并能证明空间向量的共线、共面问题;
3. 理解基底、基向量及向量的线性组合的概念.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　共线向量基本定理与共面向量定理

1. 共线向量基本定理:如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$,则存在________的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

2. 平面向量基本定理:如果平面内两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$________,则对该平面内任意一个向量 $\boldsymbol{c}$,存在唯一的实数对 (x,y),使得 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

3. 共面向量定理:如果两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$________,则向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是,存在________的实数对 (x,y),使 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

4. 判断空间中四点是否共面的方法:如果 A,B,C 三点________,则点 P 在平面 ABC 内的充要条件是,存在________的实数对 (x,y),使 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共面.　　(　　)

(2)若 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共面,则 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.　　(　　)

(3)若 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$,则 P,M,A,B 四点共面.　　(　　)

(4)若 P,M,A,B 四点共面,则 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$.　　(　　)

◆ 知识点二　空间向量基本定理

1. 定理:如果空间中的三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$________,那么对空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$,存在唯一的有序实数组 (x,y,z),使得________________.

2. 基底:空间中不共面的三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 组成空间向量的一组基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$.

3. 基向量:基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 中 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 都称为基向量.

4. 空间向量基本定理的三个关注点:

(1)空间任意向量:用空间三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 可以线性表示出空间中任意一个向量,而且表示的结果是唯一的.

(2)基底的选取:空间中任意三个不共面的向量都可以构成空间向量的一组基底.

(3)特别地,当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 不共面时,可知 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x=y=z=0$.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)空间中的任何一个向量都可用三个给定的向量表示.　　(　　)

(2)若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间向量的一组基底,则 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 都不是零向量.　　(　　)

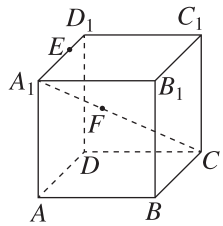
(3)若向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 与任何向量都不能构成空间向量的一组基底,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.　　(　　)

(4)任何三个不共线的向量都可构成空间向量的一组基底.　　(　　)

课中探究

◆ 探究点一 共线问题

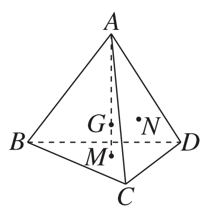
例 1 如图所示,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E 在 A_1D_1 上,且 $\overrightarrow{A_1E}=2\overrightarrow{ED_1}$,$F$ 在 A_1C 上,且 $\overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$.求证:$E,F,B$ 三点共线.



变式 [2025·重庆杨家坪中学高二期中] 如图,在四面体 $ABCD$ 中,M,N 分别为 $\triangle BCD$,$\triangle ACD$ 的重心,G 为 AM 上一点,且 $GM∶GA=1∶3$.设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$.

(1)请用$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$表示 $\overrightarrow{BN}$;

(2)求证:B,G,N 三点共线.



[素养小结]

对于空间中的三点 P,A,B,可通过证明下列结论来证明三点共线:

(1)存在实数 λ,使 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 成立.

(2)对空间任一点 O,有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}(t\in\mathbf{R})$.

(3)对空间任一点 O,有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$.

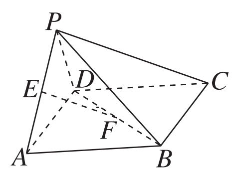
◆ 探究点二 空间向量的共面问题

例 2 (1)已知 A,B,C 三点不共线,O 是平面 ABC 外任意一点,若 $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$,则 A,B,C,M 四点共面的充要条件是 ( )

A. $\lambda=\frac{17}{30}$　　B. $\lambda=\frac{13}{30}$

C. $\lambda=-\frac{17}{30}$　　D. $\lambda=-\frac{13}{30}$

(2)[2025·北京朝阳区北京工业大学附中高二月考] 如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是平行四边形,E,F 分别为 PA,BD 的中点.求证:向量 $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BP}$ 共面.



变式 (1)(多选题)已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,则下列各选项中的三个向量共面的有 ( )

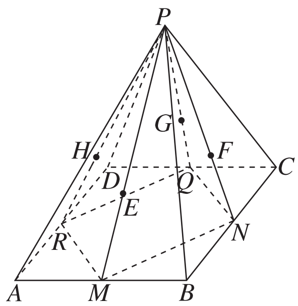
A. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$

B. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

D. $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},-3\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$

(2)如图所示,P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点,连接 PA,PB,PC,PD,点 E,F,G,H 分别是$\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PCD,\triangle PDA$ 的重心,分别延长 PE,PF,PG,PH 交 AB,BC,CD,AD 于 M,N,Q,R,并连接 MN,NQ,QR,RM.应用共面向量定理证明:E,F,G,H 四点共面.



[素养小结]

证明空间中三个向量共面或四点共面的方法:

(1)向量表示:设法证明其中一个向量可以表示成另两个向量的线性组合,即若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$,则向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

(2)若存在有序实数组(x,y,z)使得对于空间中任一点 O,有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,且 $x+y+z=1$ 成立,则 P,A,B,C 四点共面.

(3)用平面:寻找一个平面,设法证明这些向量与该平面平行.

◆ 探究点三　空间向量基本定理

例 3 已知$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间向量的一组基底,且 $\overrightarrow{OM}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$.

(1)求证:M,A,B,C 四点共面.

(2)$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 能否作为空间向量的一组基底?若能,试用这组基底表示 $\overrightarrow{OM}$;若不能,请说明理由.

变式 (1)已知$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间向量的一组基底,则下列说法错误的是　　(　　)

A. 若 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $x=y=z=0$

B. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两共面,但 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面

C. 一定存在实数 x,y,使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$

D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}$ 一定能构成空间向量的一组基底

(2)在四面体 $ABCD$ 中,点 G 为$\triangle ABD$ 的重心,E,F,H 分别为 AB,BD,DA 的中点,且 $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{CG}$,则实数 $k=$________.

[素养小结]

用基底表示向量的步骤:

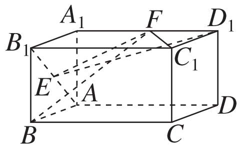
(1)定基底:根据已知条件,确定三个不共面的向量构成空间向量的一组基底.

(2)找目标:用确定的基底(或已知基底)表示目标向量,需要根据向量的三角形法则及平行四边形法则,结合相等向量的代换、向量的运算进行变形、化简,最后求出结果.

(3)下结论:利用空间向量的一组基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$可以表示出空间所有向量.表示要彻底,结果中只能含有 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,不能含有其他形式的向量.

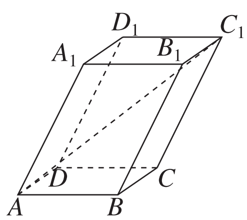
◆ 探究点四　空间向量基本定理的应用

例 4 ［2024・山东日照高二期中］在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=2$，$AD=4$，E 为 AB_1 的中点，F 为 A_1D_1 的中点．试计算：
(1)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED_1}$；(2)$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB_1}$；(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC_1}$．



变式 (1)［2025・江苏南京玄武高级中学高二月考］在正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，O 是△ABC 的中心，$PA=AB=2\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=$________．

(2)如图，平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $\angle A_1AD=\angle A_1AB=60°$，$AA_1=2$，则线段 AC_1 的长为________．



［素养小结］

利用空间向量基本定理求空间向量的数量积、长度、夹角的技巧：

根据条件确定基底，一般用已知的向量(向量的长度已知，夹角已知等)作为基底，有时也可自设基底，然后用基底表示要求的向量，可证平行、垂直，可求两向量的数量积、夹角，可求向量的长度．

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}$，则　　(　　)

A. $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{p}$ 共线　　B. $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 共线

C. $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 共线　　D. $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{p}$ 共面

2. 对空间中任意一点 O 和不共线的三点 A，B，C，能得到 A，B，C，D 四点共面的是　　(　　)

A. $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是不共面的三个向量，则下列能构成空间向量的一组基底的是　　(　　)

A. $3\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　　B. $2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a}$，$2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$

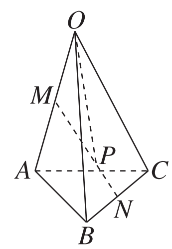
4. ［2025・福建福州金山中学高二期末］如图，已知 M，N 分别是四面体 $OABC$ 的棱 OA，BC 的中点，点 P 在线段 MN 上，且 $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{PN}$，设向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{OP}=$　　(　　)

A. $\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}$

B. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$

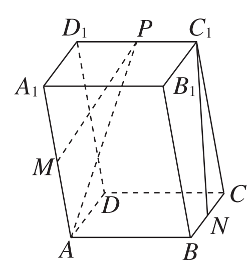
D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}$



5. 如图所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，$M$，$N$，$P$ 分别是 AA_1，BC，C_1D_1 的中点，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示以下各向量：

(1)$\overrightarrow{AP}$；

(2)$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}$．



1.1.3 空间向量的坐标与空间直角坐标系

第 1 课时 空间向量的坐标及运算

【学习目标】

1. 了解空间向量坐标的定义；
2. 掌握空间向量运算的坐标表示；
3. 能够利用坐标运算来求空间向量的长度与夹角.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间中向量的坐标

1. 单位正交基底

一般地，如果空间向量的基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$中，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$都是________，而且这三个向量________，就称这组基底为单位正交基底.

2. 单位正交分解

在单位正交基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$下向量的分解称为向量的单位正交分解，如果$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$，则称有序实数组________为向量$\boldsymbol{p}$的坐标，记作____________，其中$x$，$y$，$z$都称为$\boldsymbol{p}$的坐标分量.

◆ 知识点二 空间向量的坐标运算

若$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

向量运算	向量表示	坐标表示
相等	$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$	____________
加法	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	____________
线性运算	$\mu\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$	____________
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	____________
模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$	$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
夹角	$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

◆ 知识点三 空间向量的平行、垂直

设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$.

1. 平行：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(x_2,y_2,z_2)=\lambda(x_1,y_1,z_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\_\_\_\_\_\_,\\ y_2=\_\_\_\_\_\_,\\ z_2=\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$

当$\boldsymbol{a}$的每一个坐标分量都不为零时，有$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}$.

2. 垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$____________.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)空间向量$\boldsymbol{a}=(1,1,1)$是一个单位向量. ( )

(2)若空间向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$与$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$共线，则$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$. ( )

(3)设$\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(0,m,2)$，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$m=1$. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 空间向量的坐标运算

例 1 已知$\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(0,-1,2)$，求：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；(2)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$；(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(4)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

变式 (1)已知向量$\boldsymbol{a}=(1,1,m)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-4,2)$，$\boldsymbol{c}=(2,-1,0)$不共线，若$\boldsymbol{c}$可用$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$表示，则m的值为________.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,2,0)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,4,-2)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

[素养小结]

解决空间向量坐标运算问题，一是直接计算，首先将空间向量用坐标表示，然后准确运用空间向量坐标运算公式计算；二是通过解方程组求其坐标.

◆ 探究点二　空间向量模与夹角的坐标表示

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,2,x)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(1)求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

(2)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值.

变式　已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1,0)$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角是________.

[素养小结]

1. 求向量的模的两种基本策略

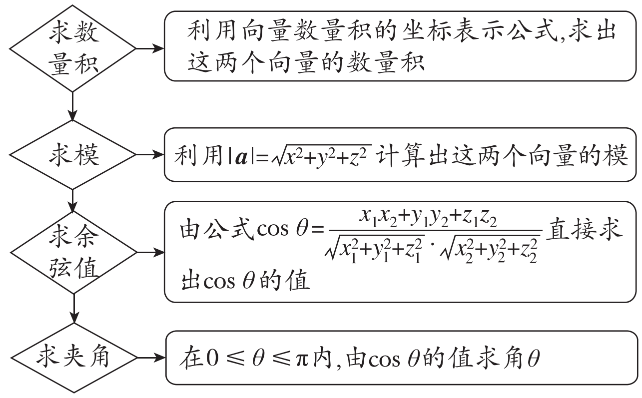
(1)字母表示下的运算.

利用 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$，将向量的模的运算转化为向量的数量积问题.

(2)坐标表示下的运算.

若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2+z^2$，于是有 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. 利用数量积求两向量夹角的步骤



◆ 探究点三　空间向量平行、垂直的坐标表示

例 3　(1)在空间中，已知 $\overrightarrow{AB}=(0,1,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-2,m+1)$，若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，则 m 的值为________.

(2)已知 $\boldsymbol{a}=(x,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,y,2)$，$\boldsymbol{c}=(2,-2,1)$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$.

①若 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线，求实数 k 的值；

②若向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，求实数 k 的取值范围.

变式　(1)[2025·河北邯郸一中高二月考] 已知 $\boldsymbol{a}=(x,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-y)$，且 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则　(　　)

A. $x=\dfrac{1}{3}$，$y=1$　　B. $x=\dfrac{1}{2}$，$y=-4$

C. $x=2$，$y=-\dfrac{1}{4}$　　D. $x=1$，$y=-1$

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,1)$，且$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则实数 λ 的值是 ( )

A. $\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$

C. 3　　D. -3

[素养小结]

(1)判断空间向量垂直或平行的步骤：

对于 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，根据 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ 的值是否为 0 判断两向量是否垂直；根据 $x_1=\lambda x_2$，$y_1=\lambda y_2$，$z_1=\lambda z_2(\lambda\in\mathbf{R})$或$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$($x_2$，$y_2$，$z_2$ 都不为 0)是否成立判断两向量是否平行.

(2)平行与垂直的应用.

①适当引入参数(比如向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行，可设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$)，建立关于参数的方程(组).

②选择坐标形式，以达到简化运算的目的.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,x)$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则实数 x 的值是 ( )

A. -2　　B. -1

C. 0　　D. 1

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,-6,6)$，$\boldsymbol{c}=(2,4,4)$，则 ( )

A. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$

C. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

3. 已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(1,n,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,2)$，若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则$|\boldsymbol{a}|=$ ( )

A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{37}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,-4)$，则 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=$________，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$________.

5. [2025·河南周口高二期中] 已知空间中三点 $A(-2,-3,3)$，$B(1,0,2)$，$C(2,-1,5)$，设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$.

(1)若$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，求实数 k 的值；

(2)若向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，且$|\boldsymbol{c}|=4$，求 $\boldsymbol{c}$ 的坐标.

第 2 课时　空间直角坐标系及空间向量坐标的应用

【学习目标】

1. 了解空间直角坐标系；

2. 会求空间中的点的坐标，两点间的距离以及两点的中点坐标；

3. 掌握空间向量坐标的简单应用.

课前预习

知识导学　素养初识

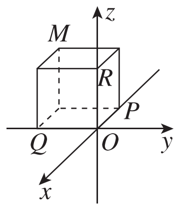
◆ 知识点一　空间直角坐标系的建立

在空间中任意选定一点 O 作为坐标原点，选择合适的平面先建立平面直角坐标系________，然后过 O 作一条与____________的数轴 z 轴，这样建立的空间直角坐标系记作________.

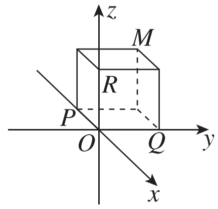
(1)x 轴、y 轴、z 轴是两两互相________的，它们都称为________.

(2)通过每两个坐标轴的平面都称为__________，分别记为__________、__________、__________.

(3)在平面内画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般把 x 轴、y 轴画成水平放置，x 轴正方向与 y 轴正方向夹角为__________，z 轴与 y 轴(或 x 轴)________.如图①②所示.



①



②

◆ 知识点二　空间直角坐标系下点的坐标与向量坐标

1. 空间中点的坐标

在空间直角坐标系中,点 M 的坐标为(x,y,z),则 x,y,z 都称为点M 的________,且 x 称为点 M 的________(或________),y 称为点 M 的________(或 y 坐标),z 称为点M 的________(或________).

2. 空间直角坐标系下向量的坐标

在空间直角坐标系下,如果指定空间中的单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的始点都在原点 O,且它们的方向分别与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向相同,则$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是________,且向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标与 P 点的坐标________,即 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=$________$\Leftrightarrow P$________.

3. 空间向量坐标的应用

设 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$为空间直角坐标系中的两点,则

(1)$\overrightarrow{AB}=$________,即空间向量在空间直角坐标系中的坐标,等于表示这个空间向量的有向线段的终点坐标________始点坐标.

(2)若 M 是线段 AB 的中点,则 M 的坐标为________.

(3)$|\overrightarrow{AB}|=$________.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)空间直角坐标系中 x 轴上的点的纵坐标为 0 且竖坐标为 0.　(　)

(2)空间直角坐标系中 xOy 平面上的点的竖坐标为 0.　(　)

(3)空间直角坐标系中,点$(1,\sqrt{3},2)$关于 yOz 平面的对称点为$(-1,\sqrt{3},2)$.　(　)

(4)空间直角坐标系中的任意一个点都有唯一的实数对(x,y,z)与之对应.　(　)

课中探究

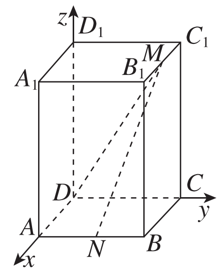
考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间点与向量的坐标表示

例 1 (1)在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=2$,$D_1D=3$,点 M 是 B_1C_1 的中点,点 N 是 AB 的中点.建立如图所示的空间直角坐标系.

①写出点 D,N,M 的坐标;

②求 $\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MN}$ 的坐标.

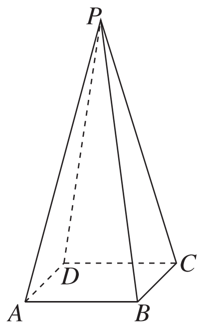


(2)若(1)中以 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系.

①写出点 D,N,M 的坐标;

②求 $\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MN}$ 的坐标.

变式 已知正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面边长为 4，侧棱长为 10，试建立适当的空间直角坐标系，并写出各顶点的坐标和向量 $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{BC}$ 的坐标.



[素养小结]

空间中点 M 的坐标的三种确定方法：

(1)过 M 作 MM_1 垂直于平面 xOy，垂足为 M_1，求出 M_1 的 x 坐标和 y 坐标，再由射线 M_1M 的指向和线段 M_1M 的长度确定 z 坐标.

(2)构造以 OM 为体对角线的长方体，由长方体以 O 为共顶点的三条棱的长度结合点 M 的位置，可以确定点 M 的坐标.

(3)若题中所给的图形中存在垂直于坐标轴的平面，或点 M 在坐标轴或坐标平面上，则利用这一条件，再作坐标轴的垂线即可确定点 M 的坐标.

◆ 探究点二 空间中点的对称问题

例 2 (1)在空间直角坐标系中，已知点 $A(1,0,3)$ 与 $B(3,-2,-1)$ 关于点 M 对称，则点 M 的坐标是 ( )

A. $(1,1,1)$　　B. $(2,1,1)$

C. $(2,-1,1)$　　D. $(1,2,3)$

(2)已知点 $A(-3,1,-4)$，点 A 关于 xOy 平面的对称点的坐标为 ( )

A. $(-3,-1,-4)$　　B. $(-3,-1,4)$

C. $(-3,1,4)$　　D. $(3,-1,-4)$

变式 (1)在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，点 $A(1,2,3)$ 与点 $B(-1,-2,3)$ 关于 ( )

A. 原点对称　　B. xOy 平面对称

C. y 轴对称　　D. z 轴对称

(2)在空间直角坐标系中，点 B 是点 $A(3,4,5)$ 在 xOy 平面内的射影，则 $|\overrightarrow{OB}|=$ ( )

A. 5　　B. 25

C. $\sqrt{34}$　　D. $\sqrt{41}$

[素养小结]

求空间对称点的规律方法：

空间中点的对称问题可类比平面直角坐标系中点的对称问题，需要掌握对称点的变化规律，才能准确求解. 对称点的问题常常采用“关于谁对称，谁保持不变，其余互为相反数”这个结论.

◆ 探究点三 空间向量坐标的应用

例 3 [2024·辽宁沈阳高二期末] 在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,G 分别是 DD_1,BD,BB_1 的中点.

(1)求证：$EF\perp CF$；

(2)求 $\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CG}\rangle$；

(3)求 CE 的长；

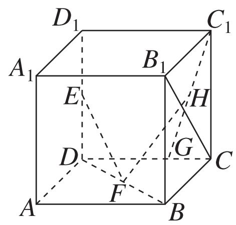
(4)求直线 GF 与直线 DD_1 的交点到点 D 的距离.

变式 ［2025·陕西咸阳高二期末］在棱长为2的正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别是DD_1，DB的中点，G在棱CD上，且$CG=\frac{1}{3}CD$，H是C_1G的中点.

(1)证明：$EF\perp B_1C$；

(2)求$\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{C_1G}\rangle$；

(3)求FH的长.



［素养小结］

通过分析几何体的结构特征，建立适当的坐标系，使尽可能多的点落在坐标轴上，以便写点的坐标时便捷. 建立坐标系后，先写出相关点的坐标，再写出相应向量的坐标，把向量坐标化，然后利用向量的坐标运算求解夹角和距离问题.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. 在空间直角坐标系中，已知$A(2,2,5)$，$B(4,6,3)$，则线段AB的长度是 （　）

A. $2\sqrt{6}$　　B. $4\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{2}$　　D. 4

2. ［2025·贵州铜仁高二期末］在空间直角坐标系中，已知$\boldsymbol{m}=(1,2,k)$以原点O为始点，终点为点M，$\boldsymbol{n}=(-k,2,3-k)$，若$M$关于$xOy$平面的对称点为$(1,2,-1)$，则$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=$ （　）

A. 2　　B. -2

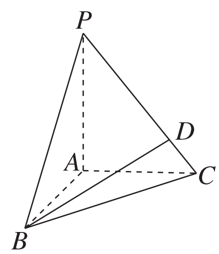
C. 5　　D. -5

3. （多选题）已知点$A(2,4,0)$，$B(1,3,3)$，点Q满足$2AQ=QB$，则点Q的坐标可能为 （　）

A. $\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},1\right)$　　B. $(-3,-11,3)$

C. $\left(\frac{5}{3},1,0\right)$　　D. $(3,5,-3)$

4. 如图，在三棱锥P-ABC中，$PA\perp$平面ABC，$AB\perp AC$，且$\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{DC}$，若$\overrightarrow{BD}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影为$\lambda\overrightarrow{AC}$，则$\lambda=$________.



5. ［2025·北京人大附中高二期中］已知空间直角坐标系中四个点$A(1,1,1)$，$B(1,2,3)$，$C(4,5,6)$，$D(7,8,x)$.

(1)求A,C的中点坐标；

(2)若点D在平面ABC上，求出x的值.